Movimiento armónico simple

1. Movimiento vibratorio

2. Movimiento armónico simple

2.1 Ley de Hooke
2.2 Ecuación fundamental del M.A.S.
2.2.1 Amplitud y periodo. Demo importante
2.3 Ecuación de la velocidad
2.3.1 Relaciones importantes
2.4 Ecuación de la aceleración
2.5 Dinámica del M.A.S.
2.6 Energía de un oscilador armónico simple
2.6.1 Energía cinética
2.6.2 Energía potencial
2.6.3 Energía mecánica
2.7 Dos ejemplos de osciladores mecánicos
2.7.1 Una masa colgada de un resorte vertical
2.7.2 El péndulo simple

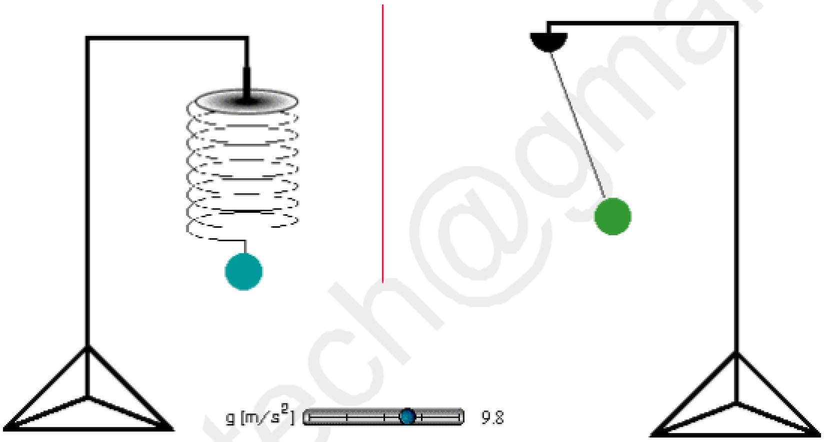
OBJETIVOS DIDÁCTICOS (basados en los CE)

- Conocer el significado físico de los parámetros que describen el movimiento armónico simple (M.A.S.) y asociarlo al movimiento de un cuerpo que oscile.
- Conocer el significado físico de los parámetros que describen el M.A.S. y asociarlo al movimiento de un cuerpo que oscile. CCL, CAA, CMCT.

Un **movimiento periódico** es aquel que pertenece al grupo de **aquellos movimientos que se repiten a intervalos iguales de tiempo**

Ejemplos: movimiento de la Luna alrededor de la Tierra, movimiento de la Tierra alrededor del Sol, movimiento de las agujas del reloj, etc. OJO, no todos los movimientos periódicos son circulares: movimiento de un péndulo simple, una masa colgando de un muelle, los latidos del corazón, etc.

Los movimientos periódicos en los que **el cuerpo se desplaza sucesivamente a un lado y a otro de su posición de equilibrio** repitiendo a intervalos regulares de tiempo sus variables cinemáticas reciben el nombre de **oscilatorios** o **vibratorios**: el recorrido que el cuerpo realiza cuando vuelve a la posición de partida moviéndose en el mismo sentido se denomina **oscilación** y dura un tiempo constante llamado **periodo**, T.



En este movimiento entre dos posiciones extremas **supondremos** que **no existe rozamiento**, por lo que **no habrá pérdida de energía mecánica**.

**** Diferencia entre movimientos oscilatorios y movimientos vibratorios**: los movimientos oscilatorios son relativamente lentos (péndulo, muelle colgando, etc.). Cuando las oscilaciones son muy rápidas se denominan vibraciones y el movimiento correspondiente es un movimiento vibratorio (alambre sujeto en su extremo). En nuestro caso, los trataremos por igual.*

2. MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

De todos los movimientos vibratorios que tienen lugar en la naturaleza, el más importante es el **armónico simple** (**M.A.S.**). Se llama así porque se puede expresar mediante **funciones armónicas**, como son el seno y el coseno.

2.1 Ley de Hooke

El M.A.S. es consecuencia de una **fuerza recuperadora** que **reclama al cuerpo hacia la posición de equilibrio**. Dicha fuerza es en todo momento proporcional al desplazamiento de la partícula que vibra. Si la partícula vibra a lo largo del eje OX, por ejemplo, se cumple la **Ley de Hooke**:

La fuerza aplicada a un resorte es proporcional al alargamiento producido.

$$\vec{F} = -k\Delta\vec{x}$$

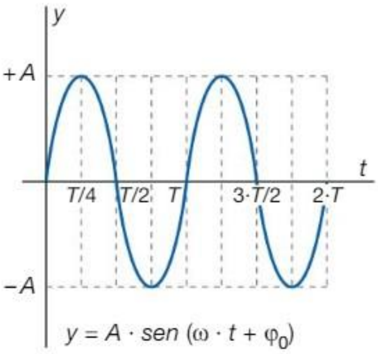
donde:

- $\Delta\vec{x}$ representa el desplazamiento entre la posición que ocupa la partícula y la posición de equilibrio $(x - x_o)$
- El signo negativo indica que la fuerza se opone a ese desplazamiento. *Los signos de F y x siguen el criterio de signos de cinemática*.

2.2 Ecuación fundamental del M.A.S.

La **ecuación fundamental del M.A.S.** o la **ecuación de la posición** viene dada por:

$$\boldsymbol{x(t) = A \cdot sen(\omega t + \varphi_0)}$$



Magnitudes fundamentales relacionadas:

- **Elongación**, **x** **(m)**: posición del móvil en cualquier instante respecto al centro de oscilación. Será positiva o negativa según el criterio de signos.
- El **centro de oscilación**, **O**, es el punto medio del segmento recorrido por el móvil (posición de equilibrio).
- **Amplitud**, **A** **(m):** es la máxima elongación posible.
- **Período**, **T** **(s)**: tiempo que tarda el cuerpo en hacer una oscilación completa.
- **Frecuencia** o **frecuencia natural**, $\boldsymbol{f}$ o $\boldsymbol{\upsilon}$ **(Hz)**: número de oscilaciones realizadas por unidad de tiempo. Es la inversa del periodo:

$$\boldsymbol{f = \frac{1}{T}}$$

- **Frecuencia angular** o **pulsación**, $\boldsymbol{\omega}$ **(rad/s)**. Número de períodos comprendidos en 2π unidades de tiempo:
- **Fase en cualquier instante** **(rad)**: $(\omega t + \varphi_{\#})$
- **Fase inicial** o **constante de fase**, $\boldsymbol{\varphi_0}$ **(rad)**: es la fase cuando $t = 0s$.

El valor de la posición se repite al aumentar la fase 2π:

$$sen(\omega t + \varphi_{\#}) = sen(\omega t + \varphi_{\#} + 2\pi)$$

2.2.1 Amplitud y periodo. Demo importante

Partimos de la ecuación fundamental del M.A.S.:

- En $t = 0$:
$$x(t = 0) = A \cdot sen(\varphi_{\#}) = A \cdot sen(\varphi_{\#} + 2\pi)$$

- En $t = T$:
$$x(t = T) = A \cdot sen(\omega T + \varphi_{\#})$$

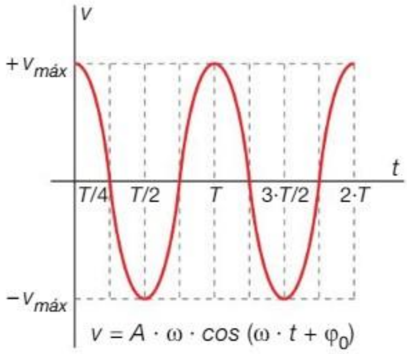
Cuando el cuerpo realiza una oscilación completa vuelve a tener la misma posición del principio, por lo que podemos igualar:

$$A \cdot sen(\varphi_{\#} + 2\pi) = A \cdot sen(\omega T + \varphi_{\#})$$
$$\varphi_{\#} + 2\pi = \omega T + \varphi_{\#}$$
$$2\pi = \omega T$$

$$\boldsymbol{\omega = \frac{2\pi}{T}} \qquad \boldsymbol{\omega = 2\pi f}$$

Comprobando así que el periodo del M.A.S. es independiente de la amplitud.

2.3 Ecuación de la velocidad



La **ecuación de la velocidad** (instantánea) se consigue derivando respecto del tiempo:

$$\boldsymbol{v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = A \cdot \omega \cdot cos(\omega t + \varphi_0)}$$

La **velocidad es nula, $v = 0$,** cuando $x(t) = \pm A$, es decir, cuando la partícula se halla en los extremos de la trayectoria.

La **velocidad es máxima, $v = \pm A \cdot \omega$,** cuando $x(t) = 0$, es decir, cuando la partícula se halla en el centro de oscilación.

2.3.1 Relaciones importantes

A partir de la posición inicial y de la velocidad inicial (**condiciones iniciales**) se pueden calcular la amplitud del movimiento y la fase inicial.

$$x^2(t=0) = A^2 \cdot sen^2(\varphi_0)$$
$$v^2(t=0) = A^2 \cdot \omega^2 \cdot cos^2(\varphi_0)$$

Despejo:

$$sen^2(\varphi_0) = \frac{x_0^2}{A^2}$$
$$cos^2(\varphi_0) = \frac{v_0^2}{A^2 \cdot \omega^2}$$

- De trigonometría sabemos que:

$$sen^2(\varphi_0) + cos^2(\varphi_0) = 1$$

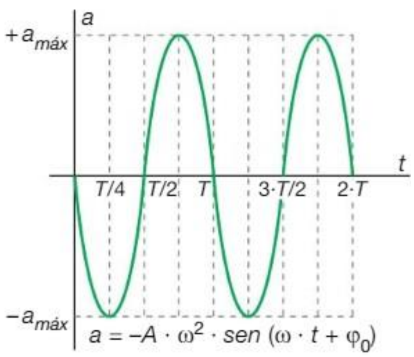
de donde se consigue la amplitud:

$$\frac{x_0^2}{A^2} + \frac{v_0^2}{A^2 \cdot \omega^2} = 1 \quad \rightarrow \quad x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} = A^2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A = \pm\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}}$$

- De la fórmula de la tangente calculamos la fase inicial:

$$\tan(\varphi_0) = \frac{sen(\varphi_0)}{\cos(\varphi_0)} = \frac{\frac{x_0}{A}}{\frac{v_0}{A \cdot \omega}} = \frac{x_0 \cdot \omega}{v_0} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\varphi_0 = arctan\left(\frac{x_0 \cdot \omega}{v_0}\right)}$$

2.4 Ecuación de la aceleración



La **ecuación de la aceleración** (instantánea) se consigue derivando respecto del tiempo:

$$\boldsymbol{a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -A \cdot \omega^2 \cdot sen(\omega t + \varphi_0)}$$

que se puede escribir también como:

$$\boldsymbol{a(t) = -\omega^2 \cdot x(t)}$$

La **aceleración es nula, a = 0**, cuando $x(t) = 0$, es decir, cuando la partícula se halla en el centtro de oscilación.	La **aceleración es máxima, a = $\pm A \cdot \omega^2$**, cuando $x(t) = \pm A$, es decir, cuando la partícula se halla en los extremos de la trayectoria

La aceleración es directamente proporcional a la elongación, pero de sentido contrario a esta. **Esta relación es propia del M.A.S.** y sirve para determinar si un movimiento es periódico o no. Todo sistema que se mueva con esta aceleración recibe el nombre de **oscilador armónico simple**.

2.5 Dinámica del M.A.S.

El movimiento armónico simple es acelerado y es consecuencia de una fuerza recuperadora, por lo que podemos usar la **2º Ley de Newton** como sigue:

$$F = m \cdot a = m \cdot (-\omega^2 \cdot x)$$

$$\boldsymbol{F = -m \cdot \omega^2 \cdot x}$$

Como m y ω no varían, aparece una constante asociada a la fuerza recuperadora y que es característica de cada oscilador: **constante elástica** o **recuperadora**. A mayor k mayor fuerza atrae al móvil a la posición de equilibrio.

$$\boldsymbol{k = m \cdot \omega^2} \qquad [N/m]$$

La fuerza que produce un M.A.S. es una **fuerza central**, dirigida hacia el punto de equilibrio y proporcional a la distancia a este.

2.6 Energía de un oscilador armónico simple

2.6.1 Energía cinética

Porque el oscilador está en movimiento:

$$E_C = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} m \cdot A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{E_C = \frac{1}{2} k \cdot A^2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)}$$

Por tanto, en un M.A.S. la energía cinética es periódica y <u>depende de la elongación</u> si hacemos el cambio del punto 2.3.1.:

$$\boldsymbol{E_C = \frac{1}{2} k \cdot (A^2 - x^2)}$$

Su **valor máximo** se da en la posición de equilibrio:

$$E_{Cmax} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2$$

2.6.2 Energía potencial

Porque el movimiento armónico es consecuencia de la acción de una fuerza conservativa.

Teorema de la energía potencial (asociado a una fuerza conservativa como es la elástica, TEMA 0):

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B (-k\cdot x)\cdot dx = -k\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_A^B = -\frac{1}{2}k(x_B^2 - x_A^2) = -\Delta E_P$$

de donde se deduce que:

$$E_{PB} - E_{PA} = \frac{1}{2}k\left(x_B^2 - x_A^2\right)$$

$$\boldsymbol{E_P = \frac{1}{2}kx^2}$$

Por tanto, en un M.A.S. la energía potencial también es periódica y <u>depende de la elongación</u>. Su **valor máximo** se da en los extremos:

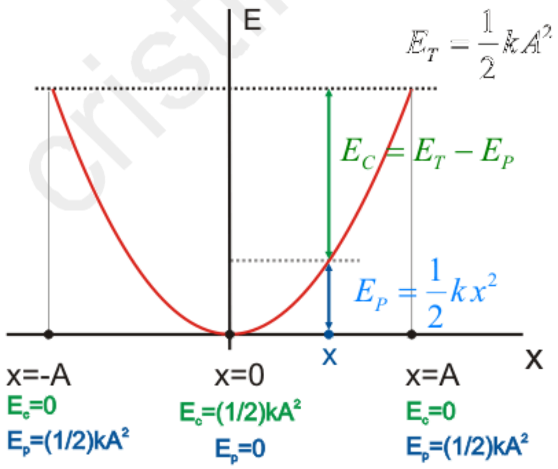
$$E_{Pmax} = \frac{1}{2}\cdot k\cdot A^2$$

2.6.3 Energía mecánica

Sumando las energías anteriores:

$$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2}k\cdot(A^2 - x^2) + \frac{1}{2}kx^2 \quad\rightarrow\quad \boldsymbol{E_M = \frac{1}{2}k\cdot A^2}$$

En el movimiento armónico la energía mecánica no depende de la posición. Solamente depende de las características del oscilador y de la amplitud. Además, Como en el M.A.S. no existe rozamiento, **la energía mecánica permanece constante**.



Un oscilador es un sistema conservativo:

- La energía potencial aumenta a medida que la energía cinética disminuye, y viceversa.

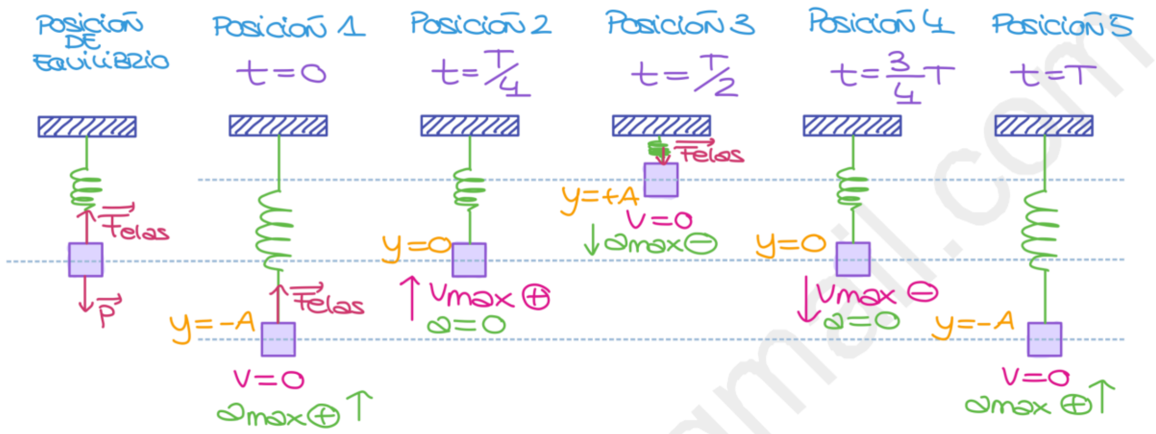
- Existen dos valores de la elongación para los cuales ambas energías valen lo mismo:

$$\frac{1}{2}k\cdot(A^2 - x^2) = \frac{1}{2}kx^2$$

$$A^2 - x^2 = x^2 \quad \rightarrow \quad A^2 = 2x^2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = \pm \frac{A}{\sqrt{2}}}$$

2.7 Dos ejemplos de osciladores mecánicos

2.7.1 Una masa colgada de un resorte vertical



Un muelle de constante k está suspendido de un extremo. De él se cuelga una masa m y se deja descender suavemente hasta que el sistema alcanza el equilibrio. En estas condiciones el muelle se ha estirado una longitud Δl y una fuerza recuperadora elástica aparece en el muelle (**Ley de Hooke**). Por la **2ª Ley de Newton** se cumple:

$$\boldsymbol{F_{elas} - p = 0} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{k\Delta l = mg}$$

de donde podemos despejar la constante elástica del muelle.

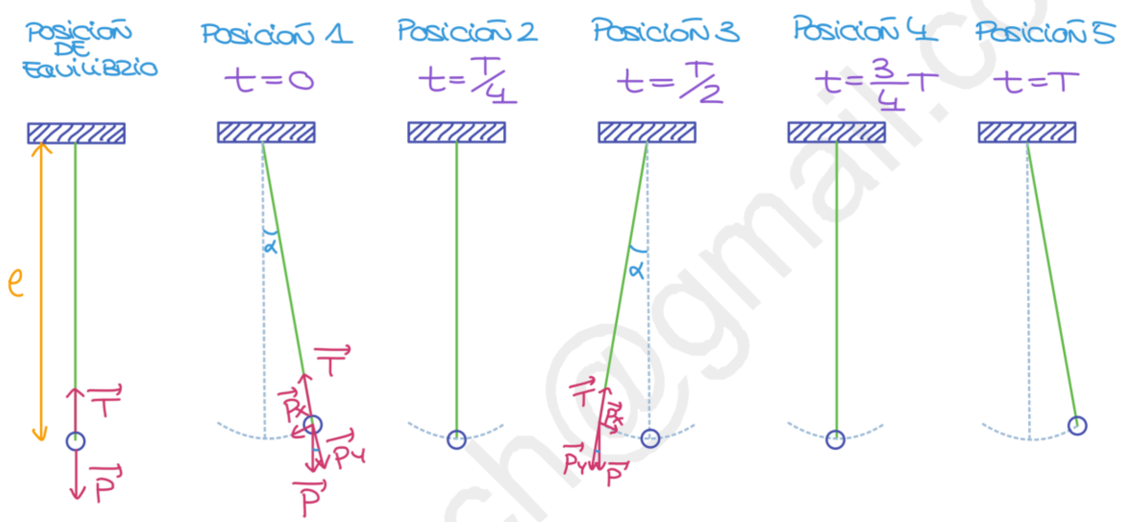
Si ahora la masa se desplaza verticalmente una distancia y de su posición de equilibrio, la fuerza elástica es mayor que el peso, y si el sistema se deja en libertad, la masa se acelera comenzando un movimiento de vaivén. Las características principales del movimiento se resumen en la tabla siguiente:

	POSICIÓN 1	POSICIÓN 2	POSICIÓN 3	POSICIÓN 4
$\boldsymbol{y}$	$-A$	0	$+A$	0
Velocidad	0	$v_{max} > 0$	0	$v_{max} < 0$
A partir de ese instante	La velocidad aumenta	La velocidad disminuye	La velocidad aumenta en valores negativos	La velocidad disminuye en valores negativos
$\boldsymbol{F_{elas}}$	F_{max}	0	F_{max}	0
$\boldsymbol{a}$	$a_{max} > 0$	0	$a_{max} < 0$	0
A partir de ese instante	La aceleración disminuye	La aceleración aumenta en valores negativos	La aceleración disminuye en valores negativos	La aceleración aumenta

* La posición 5 es exactamente igual a la posición 1 solo que se alcanza de nuevo transcurrido un periodo.

2.7.2 El péndulo simple

Recibe el nombre de **péndulo simple** el sistema formado por una pequeña bola colgada de un hilo inextensible y que se mueve sin rozamiento. Si el hilo es relativamente largo (un metro, por ejemplo) y el ángulo de las oscilaciones es muy pequeño, podemos asumir que el movimiento pendular se corresponde con un M.A.S.[1]



El péndulo está en reposo en la posición inicial, ya que en ella el peso de la bola y la tensión del hilo se equilibran. En cambio, en la posición 1 se rompe el equilibrio y, al descomponer el peso, se observa que la componente normal de este se anula con la tensión. Sin embargo, la componente tangencial del peso hará que la bola se acelere para volver a la posición de inicio: **esta fuerza será la fuerza recuperadora del movimiento**.

$$F_R = p_x = -mgsen(\propto)$$

Para ángulos $\propto \leq 14° \approx 0{,}245rad$, se puede asumir que $sen(\propto) \approx \propto$ con lo que se puede sustituir el seno por el ángulo en radianes: $F_R = -m \cdot g \cdot \propto$

Si además recordamos la fórmula del arco: $\propto = {}^{x}/_{l}$, nos queda:

$$F_R = -m \cdot g \cdot \frac{x}{l}$$

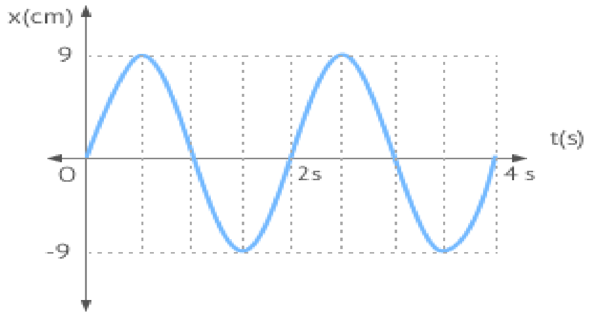
que podemos igualar con la **Ley de Hooke**:

$$-m \cdot g \cdot \frac{x}{l} = -k \cdot x \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{k = \frac{mg}{l}}$$

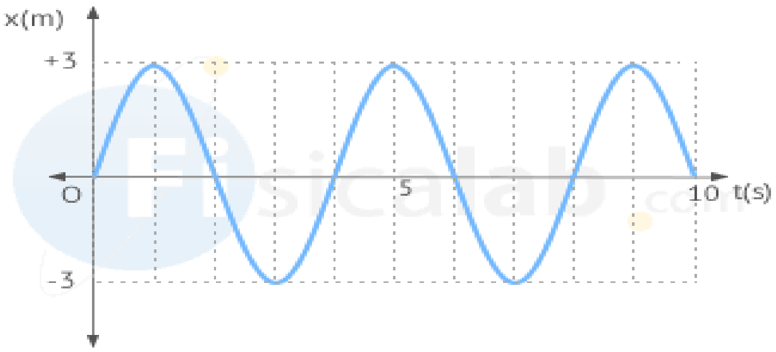
[1] En realidad, la trayectoria del péndulo es un arco de circunferencia, pero puede suponerse una recta para valores muy pequeños de $\propto$.

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

1. Un oscilador armónico de amplitud 25cm tiene una velocidad de 15m/s cuando pasa por su posición de equilibrio. ¿Cuál es el período y la aceleración máxima?
2. Un movimiento armónico tiene una amplitud de 10cm y su aceleración máxima es 28cm/s^2, ¿Cuáles son su período y su velocidad máxima?
3. Hallo la longitud de un péndulo simple cuyo período es de 18 segundos.
4. Hallo el período de oscilación de una masa de 220 Kg. unida a un resorte de constante 110 N/m.
5. Encuentro la masa de un cuerpo que unido a un resorte de 15 N/m de constante elástica oscila con un período de 12.6 segundos.
6. ¿Cuál es el período de oscilación de un péndulo que tiene una longitud de 15,5 metros?
7. Un péndulo simple de 5 m oscila con una amplitud de 12 cm. Hallar: el período, la velocidad del péndulo en el punto más bajo, la aceleración en los extremos de su trayectoria.
8. 11)La posición de una partícula que se mueve con MAS es $x = 4{,}5\text{sen}(4\pi t)$ con x en metros (m) y t en segundos (s). Determinar la amplitud y el período de esta partícula.
9. 12) La posición de una partícula que se mueve con MAS es $x = 2\cos(5t)$ con x en metros (m) y t en segundos (s). Determine la ecuación de velocidad para la misma partícula.
10. 13) La velocidad de una partícula que se mueve con MAS esta descrita por $v = 8\text{sen}(2t)$ donde v está medida en m/s. Hallar la amplitud del movimiento
11. 14) El movimiento de una partícula esta descrito por la siguiente gráfica. Escriba la ecuación de posición para este movimiento.

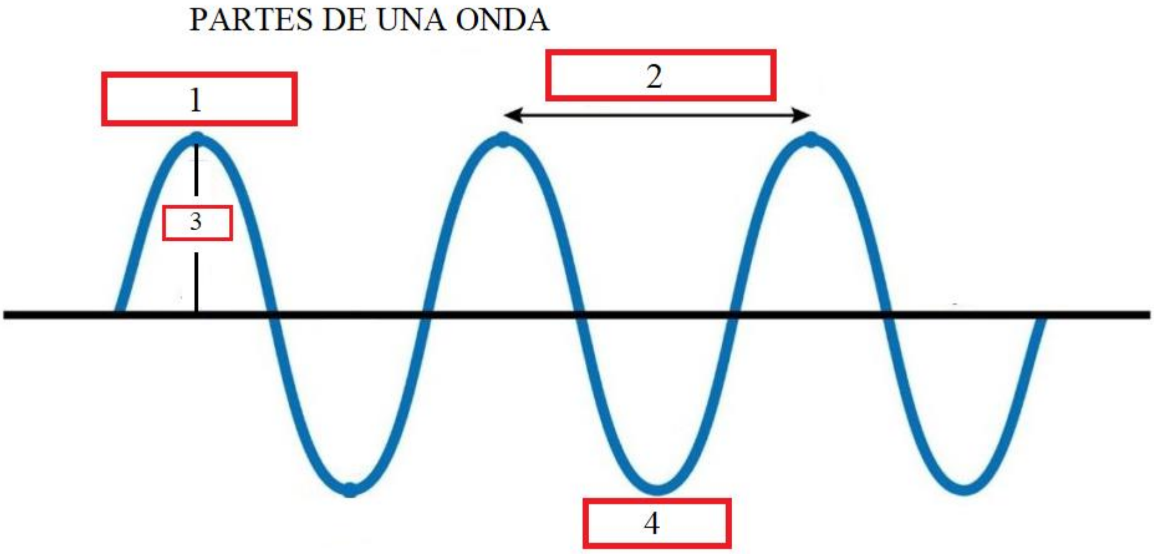


12. El movimiento de una partícula esta descrito por la siguiente gráfica. Determine la frecuencia del movimiento.



ONDAS

17. Escriba las palabras correspondientes en la siguiente imagen



18. Complete el siguiente párrafo con las palabras correspondientes.
    Las ondas son un modelo para representar movimientos periódicos en el tiempo, se caracterizan por solo permiten la propagación de energía, nunca de materia. Las ondas se pueden clasificar según su medio de propagación en _____________, las cuales necesitan un medio para propagarse, y ____________, las cuales pueden viajar en el vacío como por ejemplo ________. Además, también se pueden clasificar según su dirección de propagación en ondas longitudinales y transversales.