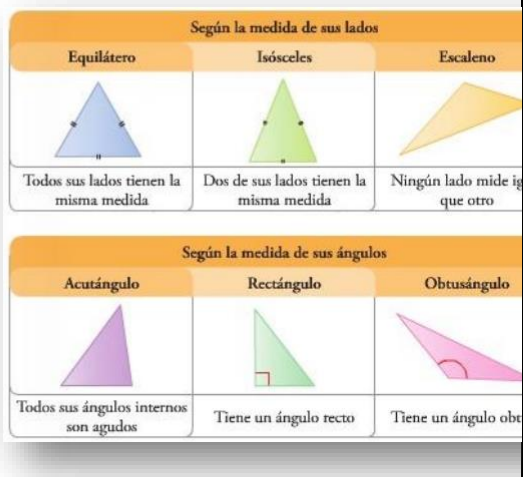
COLEGIO SAN RAFAEL I.E.D.
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN DE
BOGOTÁ, D. C.

	MATERIAL DE APOYO
ASIGNATURA	MATEMATICAS
GRADO	DECIMO
PERIODO ACADÉMICO	PRIMER PERIODO ACADEMICO
DOCENTE	CLARENA ARANDA R. (JORNADA MAÑANA) OSCAR AMAYA (JORNADA TARDE)
DESEMPEÑO DEL PERIODO	Soluciona problemas aplicando las razones trigonométricas, reconociendo su importancia para el desarrollo de la ciencia.
INDICACIONES GENERALES	A continuación, encontrará material de apoyo y refuerzo para el desarrollo de las actividades propuestas en clase para el primer periodo. Se deben desarrollar en el cuaderno las actividades propuestas con sus respectivos procedimientos.

PRIMER PERIODO

- **Triángulos.**

<table>
<tr><th>Clasificación de triángulos.</th><th>Propiedades de los triángulos.</th></tr>
<tr><td>


</td><td>
- Si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces, los ángulos opuestos a estos lados son congruentes.
- Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces, los lados opuestos a estos ángulos son congruentes.
- La suma de la medida de los ángulos internos de un triángulo es 180°
- Si dos triángulos tienen la misma base b y la misma altura h, entonces, tienen áreas iguales.
- Si un triángulo es equilátero, entonces, es equiángulo.
- Cada ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de los ángulos internos no adyacentes.
</td></tr>
</table>

Ejercicio:

- Consulte las definiciones de las palabras: congruente, adyacente
- Realice un ejemplo, con medidas, donde se evidencie cada una de las propiedades de los triángulos expuestas en el anterior cuadro.

- **Teorema de Pitágoras.**
- **https://contenidosparaaprender.colombiaaprende.edu.co/G_10/M/M_G10_U03_L02/M_G10_U03_L02_01_01_01.html**
- **https://contenidosparaaprender.colombiaaprende.edu.co/G_10/M/M_G10_U03_L02/M_G10_U03_L02_03_01_00.html**
- **https://contenidosparaaprender.colombiaaprende.edu.co/G_10/M/M_G10_U03_L02/M_G10_U03_L02_03_02_01.html**
- **https://contenidosparaaprender.colombiaaprende.edu.co/G_10/M/M_G10_U03_L02/M_G10_U03_L02_04_01_01.html**

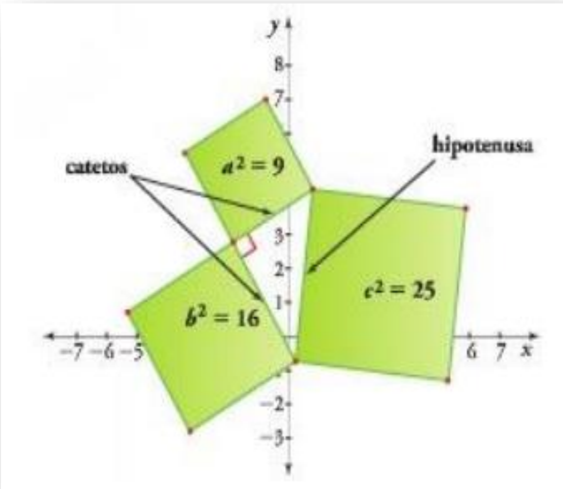
En todo **triangulo rectángulo** el lado opuesto al ángulo recto se denomina ***hipotenusa***, y sus lados adyacentes se conocen como ***catetos***.

El teorema de Pitágoras nos dice que:

La suma de los cuadrados de los catetos es igual a la medida de la hipotenusa al cuadrado

Para efectos de notación, vamos a definir las longitudes de los catetos con las letras ***a, b*** y la longitud de la hipotenusa con la letra ***c***, de modo que, la expresión que nos define el ***teorema de Pitágoras*** es:

$$c^2 = a^2 + b^2$$



Geométricamente, se evidencia que se pueden relacionar el área de los cuadrados formados por los catetos con el área del cuadrado formado por le hipotenusa.

Formulas

Para hallar los catetos:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

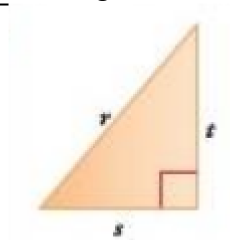
Independientemente del cateto, a o b, se usa la misma fórmula.

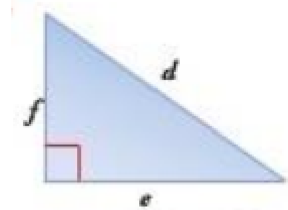
Para hallar la hipotenusa:

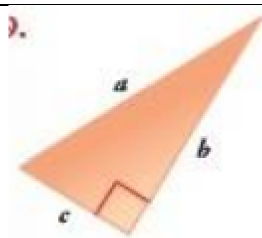
$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

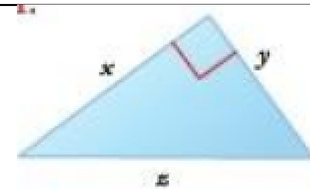
Actividad 1

1. Observa los siguientes triángulos y establece si la igualdad correspondiente es verdadera o falsa, si es falsa: escríbela como corresponda.

<table>
<tr>
<td>

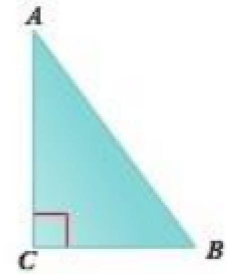
$r^2 = s^2 + t^2$</td>
<td>

$f = \sqrt{e^2 + d^2}$</td>
</tr>
<tr>
<td>

$c - \sqrt{a^2 - b^2}$</td>
<td>

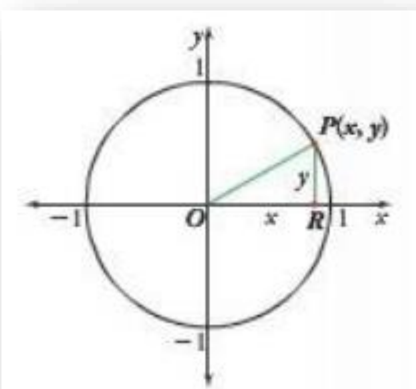
$x^2 + y^2 = z^2$</td>
</tr>
</table>

2. Completa las medidas en los casos en los que es posible calcularlas. Luego, responde:



a. Si AB = 3 y BC = 4, entonces, CA = ____
b. Si CB = 6 y AB = 8, entonces, AC = ____
c. Si AC = 10 y BC = 4, entonces, AB = ____
d. Si BC = 8 y AC = $\sqrt{3}$, entonces, BA = ____
e. Si AB = $\sqrt{8}$ y AC = $\sqrt{3}$, entonces, BC = ____
f. ¿en cuáles casos no es posible calcular la medida indicada?, ¿por qué?

3. Resuelva los siguientes problemas; Realiza un diagrama de las dos situaciones.
   a. La torre Pisa tiene una altura aproximada de 56m. Actualmente, la torre se separa de la vertical unos 3,9m. Halla la longitud de la vertical, desde la cima de la torre hasta el piso.
   b. Una escalera de 5m de largo está contra una pared con la base separada 2,5m de la pared. ¿A qué altura del piso se encuentra la parte más alta de la escalera?



Funciones trigonométricas.

Existen dos maneras de estudiar las funciones trigonométricas: como las relaciones entre los ángulos y lados de un triángulo rectángulo o a partir del estudio de una **circunferencia unitaria**

•Circunferencia Unitaria.

Es aquella cuyo centro se encuentra ubicado en el origen y radio es igual a 1.

En la figura se puede ver que el punto ***P*** se encuentra en la circunferencia tiene como coordenadas ***(x, y)***, donde tanto ***x*** como ***y*** corresponden a las medidas del triángulo rectángulo ***OPR*** con radio ***r=1***. Si se aplica el ***teorema de Pitágoras*** se tiene que $\boldsymbol{x^2 + y^2 = 1}$ por lo tanto, la ecuación de la circunferencia unitaria es:

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = 1}$$

Actividad 2

1. **¿Cuál es el centro y el radio de la circunferencia unitaria?**
2. Algebraicamente, ¿Qué relación satisface cualquier punto de la circunferencia unitaria?
3. Consulte cuál es la ecuación de la circunferencia, y represéntela con un ejemplo.
4. Determina si cada uno de los siguientes puntos se encuentran ubicados en una circunferencia unitaria.
   - **a.** $\left(-\frac{4}{9},-\frac{\sqrt{66}}{9}\right)$
   - **b.** $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$
   - **c.** $\left(\frac{3}{4},-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$
   - **d.** $\left(\frac{7}{8},-\frac{5}{8}\right)$

- **Definición de funciones trigonométricas.**

  Como se mencionó anteriormente, las funciones trigonométricas las vamos a construir a partir de la circunferencia unitaria. Para esto es necesario construir un ángulo en posición canónica (vértice en el origen), cuyo lado final interseque con la circunferencia en un punto ***P***. A partir de las coordenadas de ***P(x, y)***, es posible definir las funciones trigonométricas ***seno (sen), coseno (cos), tangente (tan/tg), cosecante (csc), secante (sec) y cotangente (cot/ctg)***, así:

$$sen\,\theta = y \qquad \cos\theta = x \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}; x \neq 0$$
$$\csc\theta = \frac{1}{y}; y \neq 0 \qquad \sec\theta = \frac{1}{x}; x \neq 0 \qquad ctg\,\theta = \frac{x}{y};\ y \neq 0$$

- **Signos de las funciones trigonométricas, según el cuadrante donde se encuentre el ángulo.**

Cuadrante	Signos de (x, y)	Funciones positivas	Funciones negativas
I	$x > 0, y > 0$	sen θ, cos θ, tan θ, sec θ, csc θ y cot θ	Ninguna
II	$x < 0, y > 0,$	sen θ y csc θ	cos θ, tan θ, cot θ y sec θ
III	$x < 0, y < 0$	tan θ y cot θ	sen θ, cos θ, sec θ y csc θ
IV	$x > 0, y < 0$	cos θ y sec θ	sen θ, tan θ, cot θ y csc θ

Actividad 3

1. Encuentra el valor de las funciones trigonométricas para para el ángulo θ determinado por el punto ***P***

- **a.** $\boldsymbol{P = (0, -1)}$
- **b.** $\boldsymbol{P\left(\frac{5}{9}, \frac{2\sqrt{14}}{9}\right)}$
- **c.** $\boldsymbol{P\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$
- **d.** $\boldsymbol{P\left(\frac{5}{7}, \frac{-2\sqrt{6}}{7}\right)}$

2. Indica en cada punto ***P***, sobre la circunferencia unitaria, cuyo ángulo $\boldsymbol{\theta}$ determinado cumpla la condición que se pide.

- **a.** $\boldsymbol{sen\,\theta = \frac{1}{4}}$
- **b.** $\boldsymbol{\cos\theta = -1}$
- **c.** $\boldsymbol{\tan\theta = \frac{-1}{5}}$
- **d.** $\boldsymbol{\sec\theta = 3}$

3. Cuando el punto de coordenadas ***(x, y)*** se hace girar $\boldsymbol{\frac{\pi}{2} rad}$ respecto al origen, su ubicación final es el punto de coordenadas ***(-y, x).***

- **a.** Si se gira 90° el punto $\boldsymbol{P = \left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right)}$con respecto al origen, ¿Dónde se ubica al final del movimiento?
- **b.** Si θ es un ángulo determinado por$\boldsymbol{\left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right)}$**,** ¿Cuáles son los valores de las funciones trigonométricas de $\boldsymbol{a = \theta + \frac{\pi}{2}}$**?**